В.И.Рыжик

ОПЯТЬ ОБ УГЛАХ. УГОЛ ДВУГРАННЫЙ

Продолжение. Начало см. в № 2 за 2009 г.

Двугранный угол как фигура

Полезно знать простейшие свойства двугранного угла. Некоторые из них можно доказать, используя полученные формулы. При этом меня интересуют двугранные углы, взятые не только сами по себе, но и тогда, когда их можно рассматривать как части трехгранного угла.

Задача 17. Точка находится внутри двугранного угла. Докажите, что существует плоскость, в которой лежат эта точка и ее проекции на грани двугранного угла и на его ребро.

Задача 18. Имеется двугранный угол. Проведены биссектор[1] этого угла, а также плоскость, перпендикулярная биссектору. Эта плоскость пересекает грани угла по пересекающимся прямым. Тогда эти прямые пересекают ребро двугранного угла под равными углами. Докажите. Проверьте обратное.

Задача 19. Докажите, что каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Задача 20. В трехгранном угле против большего плоского угла лежит больший двугранный угол, и наоборот. Докажите.

Задача 21. В трехгранном угле все плоские углы при вершине — прямые. Некоторая плоскость пересекает все его грани по треугольнику. Если она образует с двумя гранями равные углы, то этот треугольник — равнобедренный. Докажите. Можно ли обобщить это утверждение? А что можно будет доказать, если плоскость пересекает все грани под равными углами?

Задача 22. (Признаки равенства двугранных углов.) Одноименные (одинакового вида) двугранные углы равны, если: а) плоскости их граней соответственно параллельны; б) плоскости их граней соответственно перпендикулярны, а ребра параллельны. Докажите.

Задача 23. (Признаки равенства двугранных углов, являющихся частями трехгранных углов[2].) а) Двугранные углы равны, если они лежат против равных плоских углов трехгранного угла. б) Двугранные углы соответственно равны, если они

[1] *Биссектор двугранного угла* — аналог биссектрисы плоского угла; это полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла и которая делит угол пополам.

[2] Два трехгранных угла называются равными, если соответственно равны их плоские углы. Можно также определить равенство трехгранных углов на основе движения.

являются частями равных трехгранных углов и лежат против соответственно равных плоских углов.

Отдельно я выделю задачи на построение, связанные с двугранными углами.

Задачи на построение как таковые обычно встречаются при построении сечений многогранников. Здесь надо точно понимать задание. Построение в пространстве отличается от построения на плоскости. Построить фигуру в пространстве — значит доказать существование такой фигуры, исходя из того, что какие-то построения считаются выполнимыми на основании аксиом стереометрии или в результате сведения задачи к построению на плоскости.

Возможно также доказательство существования на основании принципа непрерывности. Его суть такова. Пусть имеется линия в пространстве. Пусть нас интересует величина U (длина, угол, площадь, объем), зависящая от положения переменной точки X на этой линии. Пусть для каких-то точек A и B этой линии (соответствующих различным положениям точки X) $U(A) < \alpha$ и $U(B) > \alpha$, где α — неотрицательное вещественное число. Тогда в какой-то точке C этой линии выполняется равенство $U(C) = \alpha$.

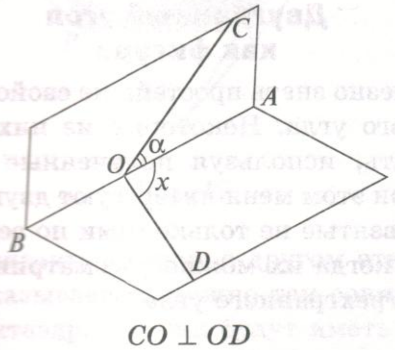
Замечание 12. В принципе непрерывности под $U(A)$ и $U(B)$ понимаются численные значения величины U.

Замечание 13 (для знатоков). Здесь неуместно строгое толкование понятия линии. На интуитивном уровне оно таково: линия — это след непрерывно движущейся точки.

Когда существование фигуры доказано, предполагается исследование, т.е. выяснение того, сколько решений имеет задача и всегда ли построение возможно.

Задача 24. Из точки, отмеченной на ребре двугранного угла, в одной из граней проведен луч. Постройте в другой грани этого угла луч: а) перпендикулярный первому лучу; б) образующий с данным лучом заданный угол.

Решение. а) Пусть дан двугранный угол с ребром AB (дан — означает, что задана его мера) и известно, что луч OC с вершиной O на ребре AB лежит в одной из граней и образует с лучом OA угол α (пусть для определенности этот угол будет острым). Нужно найти в другой грани такой луч OD, что угол COD — прямой (рис. 1).



$CO \perp OD$

Рис. 1

На этом рисунке мы видим трехгранный угол с вершиной O и ребрами OC, OA, OD. Для решения задачи достаточно найти угол x между лучами OD и OA [?]. Он без труда находится по формуле (1) (см. первую часть статьи в № 2 за 2009 г.). Учитывая, что угол COD — прямой, получим [?]:

$$\cos A = \frac{-\cos x \cos\alpha}{\sin x \sin\alpha} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg}\alpha.$$

Отсюда $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{\cos A}{\operatorname{ctg}\alpha}$. (Как всегда, найдя тригонометрическую функцию угла, мы считаем, что найден и сам угол.)

Из последнего равенства ясно, что задача имеет решение, причем одно, когда котангенс существует и отличен от нуля. А имеет ли она решение в других случаях?

Эта задача решается и на основе принципа непрерывности. В самом деле, будем поворачивать луч OC в плоскости ABC

вокруг точки O от положения OA до положения OB (см. рис. 1). Пусть вначале угол между лучом OC и произвольным лучом OD другой грани будет меньше 90°, а затем больше 90°. Значит, при каком-то положении он будет равен 90°. В этом решении есть что додумать **[?]**.

Есть и такое решение (как говорят, «на пальцах»). Построим в плоскости ABC луч OK такой, чтобы он образовывал с лучом OC прямой угол, а затем начнем его поворачивать в пространстве вокруг прямой OC. Положение, при котором луч OK окажется в другой грани нашего двугранного угла, и будет соответствовать искомому положению луча OD. Симпатичное решение, не правда ли? Но опять же в нем есть что додумать **[?]**.

Задача решена, но где же находится нужный нам луч? Хотелось бы его, так сказать, увидеть своими глазами или, как говорят математики, получить конструктивное решение задачи. Иными словами, хочется иметь готовый алгоритм — последовательность уже известных построений в пространстве, приводящих к решению. А такой алгоритм существует. Может быть, вы найдете его сами?

Угол между плоскостями

Угол между плоскостями и двугранный угол в чем-то похожи (хотя бы тем, что оба называются углами), а в чем-то различны. Различие в том, что двугранный угол «двуличен» (то ли величина, то ли фигура), а угол между плоскостями — только величина. Различие еще и в том, что двугранный угол — величина заключен в границах от 0° до 180°, а угол между плоскостями — в границах от 0° до 90°. (Такие сходство и различия полностью соответствуют тому, как обстоят дела на плоскости, когда мы говорим об угле между прямыми и угле между двумя лучами с общей вершиной.)

Прежде чем перейти к вычислению угла между плоскостями, предлагаю несколько «проверочных» вопросов, в поисках ответов на которые вы можете потренировать свое пространственное мышление. Желательно при этом не делать рисунка.

1. Верно ли утверждение — «Если две плоскости пересекаются, то биссектральные плоскости двугранных углов, образованных ими, взаимно перпендикулярны»?

2. Верно ли утверждение — «Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда есть такая плоскость, которая пересекает их под равными углами»?

3. Три плоскости расположены так, что каждые две пересекаются, причем прямые пересечения параллельны между собой. Одна из этих плоскостей образует с двумя другими угол φ. А какой угол образуют между собой эти две другие плоскости?

4. Две плоскости взаимно перпендикулярны, а третья плоскость образует с одной из них угол φ. Можно ли найти угол, который она образует со второй из данных плоскостей?

5. Верно ли утверждение — «Если три плоскости попарно перпендикулярны, а четвертая плоскость образует с каждой из них один и тот же угол, то этот угол равен 45°»?

6. Верно ли утверждение — «Существует плоскость, которая пересекает плоскости всех граней куба под одним и тем же углом»?

7. Верно ли утверждение — «Если в правильной пирамиде угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания уменьшается, то уменьшается и угол между плоскостями смежных боковых граней»?

8. Две плоскости проходят через центр симметрии цилиндра и каждая из них пересекает его основание под углом φ. Какой угол эти плоскости бразуют между собой?

9. Плоскость проходит через образующую поверхности равностороннего конуса[3] (иногда говорят, «является касательной к поверхности конуса»). Какой угол она образует с плоскостью основания?

10. Две плоскости проходят через вершину конуса и каждая из них пересекает его основание под углом φ. В каких границах лежит угол между этими плоскостями?

11. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ с квадратным основанием $ABCD$ ребро PA перпендикулярно основанию и равно его стороне. Верны ли такие утверждения: а) угол между плоскостями PAB и PAD равен углу BCD; б) угол между плоскостями PBC и ABC равен углу ACP; в) угол между плоскостями CAB и PAB равен углу PBC; г) угол между плоскостями PAC и APB равен углу между плоскостями CAP и DAP; д) угол между плоскостями DOP и OPC равен углу COD (точка O – центр квадрата $ABCD$); е) угол между плоскостями PAC и PAB равен 45^o; ж) угол между плоскостями DAC и PCB равен 45^o?

12. На столе стоит сосуд в форме равностороннего цилиндра[4], наполовину наполненный водой. На какой максимальный угол можно наклонить сосуд, но так, чтобы вода из него не выливалась?

Существует несколько способов нахождения угла между плоскостями.

Вычисление угла между плоскостями с помощью двугранного угла

При пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла и среди них два различных (по величине) в том случае, когда плоскости не взаимно перпендикулярны. Если найден (с помощью тригонометрических функций, чаще всего косинуса) тупой двугранный угол, то в качестве угла между плоскостями надо взять угол, дополняющий найденный двугранный угол до 180^o.

Выделю две ситуации, которые могут возникнуть при нахождении угла между плоскостями с помощью двугранного угла: когда на рисунке есть линия пересечения плоскостей и когда ее нет. Вот примеры.

Задача 25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите угол между плоскостями A_1DB и C_1DB.

Здесь явно просматривается двугранный угол с ребром BD (см. рис. 15 из первой части статьи).

Задача 26. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. Боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Чему равен угол, который образуют между собой плоскости противоположных боковых граней пирамиды?

Подсказка. Рассмотрите, к примеру, плоскости PAD и PBC. Прямая пересечения этих плоскостей проходит через точку P и параллельна прямым AD и BC [?]. Эта прямая будет ребром двугранного угла с гранями PAD и PBC. Здесь несложно построить линейный его угол (см. рис. 20 из первой части статьи).

Кстати, а как обосновать, что такой же угол образуют плоскости PAB и PCD?

Бывает так, что линия пересечения двух плоскостей не вполне просматривается. При этом одна общая точка на рисунке есть, но с прямой пересечения — проблемы. Вот как в такой задаче.

Задача 27. Чему равен угол между плоскостями PAD и QCD в правильном октаэдре $PABCDQ$ (рис. 2)?

---

[3] *Равносторонний конус* – конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник.

[4] *Равносторонний цилиндр* – цилиндр, осевым сечением которого является квадрат.

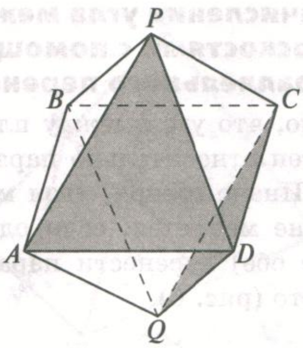


Рис. 2

Или в такой задаче.

Задача 28. Чему равен угол между плоскостями двух равных круговых сечений шара радиуса R, если расстояние между центрами этих сечений равно d, а сами сечения имеют одну общую точку?

Или в следующей задаче.

Задача 29. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ основанием является равнобокая трапеция $ABCD$ с углом φ при большем основании AD, боковые грани PAB и PCD перпендикулярны основанию. Чему равен угол между плоскостями PAB и PCD?

Еще более замысловатая ситуация возникает тогда, когда на рисунке нет ни общей для плоскостей прямой, ни общих точек.

Задача 30. Чему равен угол между плоскостями двух круговых сечений шара радиуса R, если расстояние между центрами этих сечений равно d, а расстояние между сечениями равно a?

Задача 31. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой все ребра равны. Проводятся два ее сечения плоскостями ABL и A_1B_1K (точки K и L находятся на ребре CC_1) и угол между плоскостью ABL и плоскостью нижнего основания призмы равен углу между плоскостью A_1B_1K и плоскостью верхнего основания призмы. В каких границах заключен угол между плоскостями ABL и A_1B_1K?

Подсказка. Ответ вроде бы ясен из наглядных соображений, но с его обоснованием возникают некие трудности, так как необходимо доказать монотонность искомого угла по мере роста данного. Здесь надо быть внимательными — как говорилось ранее, угол между плоскостями не всегда совпадает с двугранным углом.

Вычисление угла между плоскостями с помощью нормалей

Несложно доказать, что угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям. Мы это почти сделали, говоря о двугранных углах (см. рис. 14 из первой части статьи). Нормали можно рисовать в любом «удобном» месте, они не обязаны иметь общую точку, а потому мы можем рассматривать угол между скрещивающимися прямыми. Вернитесь к задаче 28 о сечениях шара (рис. 3).

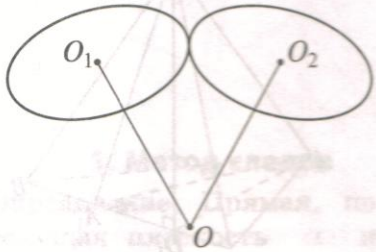


Рис. 3

Задача 32. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой боковые грани — квадраты. Чему равен угол между плоскостями, одна из которых проходит через вершины B, C_1 и точку K — середину ребра AA_1, а другая проходит через вершины C, A_1 и точку L — середину ребра BB_1 (рис. 4)?

Подсказка. Заметьте, что плоскость CA_1L перпендикулярна прямой AC_1, а плоскость BC_1K перпендикулярна прямой B_1C. Искомый угол равен углу между скрещивающимися прямыми B_1C и AC_1.

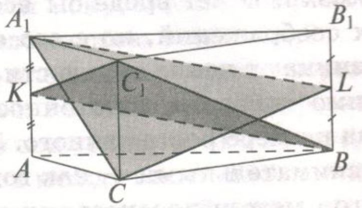


Рис. 4

Задача 33. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ основанием является ромб $ABCD$ с углом 60° при вершине A. Боковое ребро PB перпендикулярно плоскости основания. Чему равен угол между плоскостями PCD и ABC?

Задача 34. В тетраэдре $DABC$ противоположные ребра попарно равны. $AB = CD = 4$, $BC = AD = 5$, $CA = BD = 6$. Чему равен угол между плоскостями ABC и DBC?

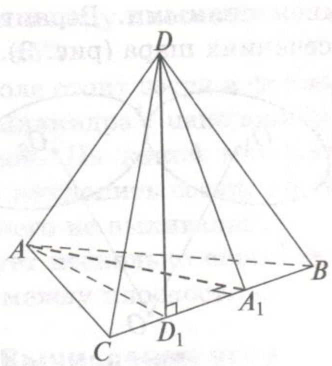
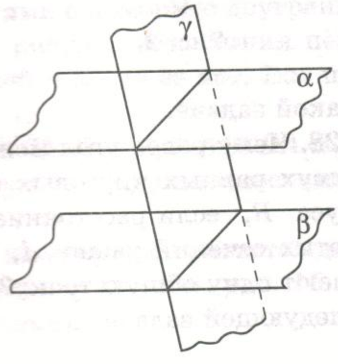


Рис. 5

Подсказка. Проведите высоты треугольников: AA_1 в грани ABC и DD_1 в грани DBC (рис. 5). Отрезок A_1D_1 — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AA_1 и DD_1. Примените формулу $6V = abh\sin\varphi$ к тетраэдру DAA_1D_1 (V — объем тетраэдра, a — длина ребра AA_1, b — длина ребра DD_1, h — расстояние между прямыми AA_1 и DD_1, а φ — угол между ними).

Вычисление угла между плоскостями с помощью параллельного переноса

Известно, что угол между плоскостями инвариантен относительно параллельного переноса. Иначе говоря, угол между плоскостями не меняется, если одну из них (или даже обе) перенести параллельно в другое место (рис. 6).



$\alpha \parallel \beta$,
$\angle\alpha\gamma = \angle\beta\gamma$

Рис. 6

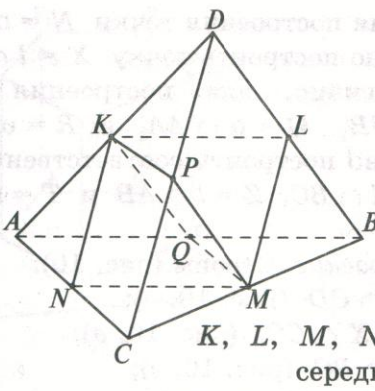
Это соображение помогает в решении некоторых задач. Вот пример.

Задача 35. Дан правильный октаэдр $PABCDQ$ (см. рис. 2). Чему равен угол между плоскостями AQD и DCP?

Подсказка. Плоскость AQD параллельна плоскости CPB [?]. Осталось найти угол между плоскостями CPB и DCP, что несложно сделать.

Задача 36. Дан правильный тетраэдр. Чему равен угол между плоскостями, каждая из которых параллельна двум скрещивающимся его ребрам?

Подсказка. В качестве таких плоскостей возьмем плоскости, которые пересекают тетраэдр по квадрату. Нормалями к ним буду прямые, проходящие через середины противоположных ребер (рис. 7).



K, L, M, N, P, Q– середины ребер

Рис. 7

Задача 37. Чему равен угол между плоскостью основания цилиндра и плоскостью его сечения, пересекающей образующие под углом φ?

Вычисление угла между плоскостями с помощью проектирования

Этот способ такой же, что и при вычислении двугранного угла с помощью проектирования (см. первую часть статьи).

Задача 38. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма с ребром, равным 2. Точка K — середина ребра BB_1, точка L — середина ребра BC. Чему равен угол между плоскостями ACA_1 и ALK?

Подсказка. Спроектируйте треугольник ALK на плоскость ACA_1.

(Окончание следует.)

Е.В.Потоскуев

О ПОСТРОЕНИИ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Окончание. Начало см. в № 2 за 2009 г.

Некоторые специальные методы построения сечений многогранников

Мы строили плоские сечения многогранников лишь на основании аксиом и теорем стереометрии. Вместе с тем существуют определенные методы построения плоских сечений многогранников. Наиболее эффективными в школьном курсе геометрии являются следующие три метода:

1) метод следов;

2) метод внутреннего проектирования;

3) комбинированный метод.

Рассмотрим каждый из них на примерах.

1. Метод следов

Определение. Прямая, по которой секущая плоскость α пересекает плоскость основания многогранника, называется следом плоскости α в плоскости этого основания.

Из определения следа получаем: в каждой его точке пересекаются прямые, одна из которых лежит в секущей плоскости, другая — в плоскости основания. Именно это свойство следа используют при построении плоских сечений многогранников методом следов. Причем в секущей плоскости удобно использовать такие прямые, которые пересекают ребра многогранника.